

円柱面エコーの計算

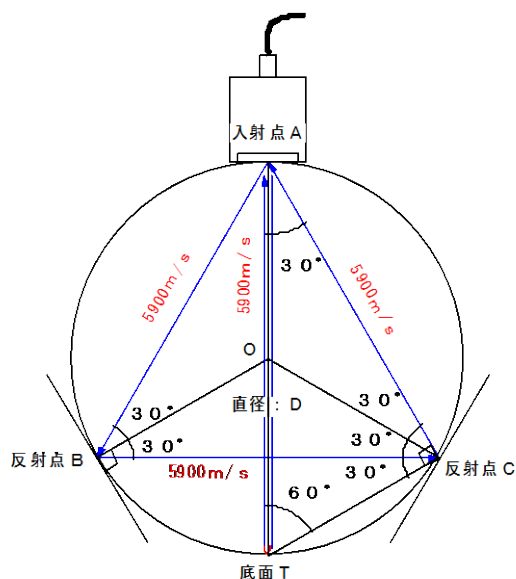
名古屋営業所 近藤 浩

キーワード 円柱面エコー、超音波探傷、垂直探傷、モード変換、スネルの法則

1. 概要

NDIのテキスト「超音波探傷試験Ⅱ2000年版」P26、P27に書いてある「円柱面エコー」の1.30D、1.68D、2.38D、2.78Dを導いてみた。(計算では縦波音速5900m/s、横波音速3230 m/sとした)

2. 1.30D



最も単純な経路で、入射点Aから入射した縦波はモード変換しないで正三角形の経路をたどり、入射点Aに戻ってくる。

正三角形で伝わる縦波の一辺の距離は

$$(\text{距離} AB) = (\text{距離} BC) = (\text{距離} CA) = X$$

正三角形の一片CAは

円の直径を通る(三角形ATC)では常に(角ACT)が直角なので(距離CA) = $D \cdot \sin(60^\circ) = X$

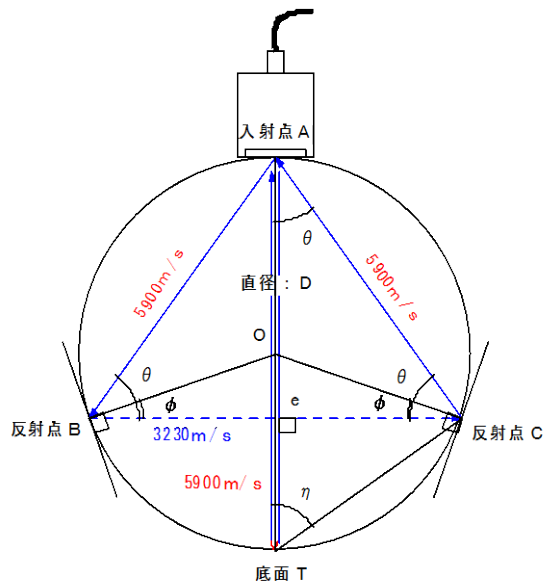
正三角形の全経路は

$$3 \cdot X = 3 \cdot D \cdot \sin 60^\circ = 2.598 \cdot D \text{ —— ①}$$

正三角形の全経路①を探傷器の表示である片道距離とすれば

$$(2.598 \cdot D) / 2 = 1.299 D \approx \boxed{1.30 D}$$

3. 1. 68D



このエコーは左図の反射点B（C）で縦波がモード変換して横波となり円柱面を横切り、反射点C（B）で再び縦波にモード変換して入射点Aに戻ってくる。

反射点B（C）でのモード変換は、スネルの法則により

$$\sin \theta / 5900 = \sin \phi / 3230 \quad \text{--- ①}$$

三角形ABOはBO=AO=半径 の二等辺三角形で角BAO=角ABO=θであるから直角三角形ABeを考えると

$$90^\circ - 2\theta = \phi \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②を①に代入し} \quad \sin \theta / 5900 = \sin (90^\circ - 2\theta) / 3230 \quad \text{--- ③}$$

加法定理を使い ③式 右辺の分子は

$$\sin (90^\circ - 2\theta) = \sin 90^\circ \cdot \cos 2\theta - \cos 90^\circ \cdot \sin 2\theta = \cos 2\theta \quad \text{--- ④}$$

$$\text{④式を③式に代入} \quad \sin \theta / 5900 = \cos 2\theta / 3230 \quad \text{--- ⑤}$$

$$\text{倍角の式} \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{を使えば} \quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \quad \text{--- ⑥}$$

$$\text{⑥式を⑤式に代入して} \quad \sin \theta / 5900 = (1 - 2\sin^2 \theta) / 3230 \quad \text{--- ⑦}$$

$$\text{ここで} \quad \sin \theta = X \quad \text{と置き換え計算すると} \quad \text{⑦式は} \quad 2X^2 + 0.547X - 1 = 0$$

$$\text{二次方程式の解を求める式} \quad X = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a \quad \text{を使い}$$

$$0 \leq \theta \leq 90^\circ \text{ の区間では} \quad X = 0.583 = \sin \theta \quad \therefore \theta = 35.7^\circ$$

$$\text{②式} \quad 90^\circ - 2\theta = \phi \quad \text{より}$$

$$\phi = 90^\circ - 2 \cdot \theta = 90^\circ - 2 \times 35.7^\circ = 18.6^\circ$$

また、直角三角形ACTにおいて

$$\eta = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 35.7^\circ = 54.3^\circ$$

辺ACの長さはDを用いると $D \cdot \sin \eta = 0.812D$ ——— ⑧

横波で進む部分、三角形TCeの辺eCは横波での遅れを考慮して ($\theta = 35.7^\circ$)

$0.812D \times \sin \theta \times 5900 / 3230 = 0.866D$ ——— ⑨

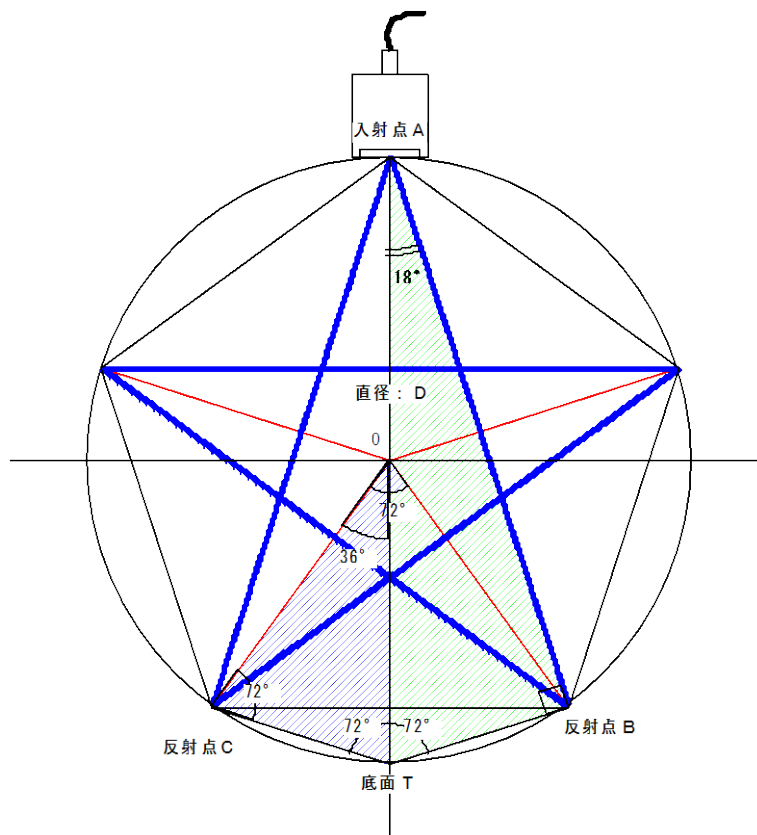
すなわち、三角形で進む経路は ⑧ $\times$ 2 + ⑨

$0.812D \times 2 + 0.866D \times 2 = 3.356D$

探傷器の表示である片道距離で計算すると

$3.356D / 2 \div \boxed{1.68D}$

4. 2. 38D



モード変換しないで縦波のまま星形の経路をたどるエコーは、左図の様に入射点Aと各反射点を結ぶ正五角形を考えて、五角形を形成する頂角 72° の二等辺三角形(OCBなど)から出発して、その半分の二等辺三角形OCTの角OCT (OTC) = 72° から、円の直径を底面とする二等辺三角形ATBの辺ABの距離を求める。

辺AB = $D \cdot \sin 72^\circ = 0.951D$

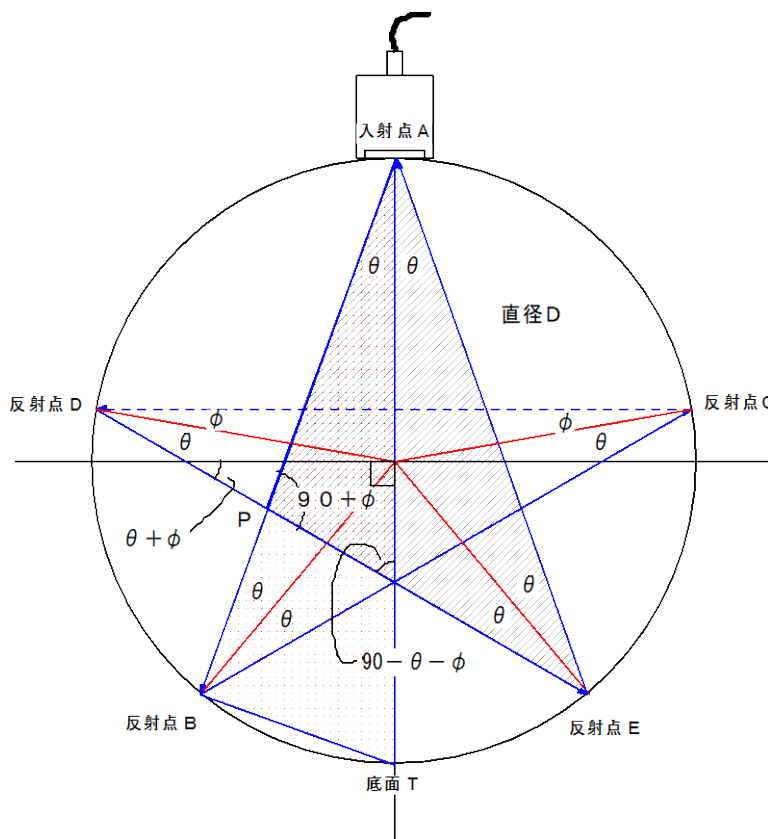
これが5回反射するので

全経路 = $5 \times 0.951D = 4.755D$

探傷器の表示である片道距離では

$4.755D / 2 = 2.378D \div \boxed{2.38D}$

4. 2. 78D



最後の五角形は左図の反射点 C 及び D でモード変換する。斜線の三角形 A P E の角 A P E は $90^\circ + \phi$ で

$$90^\circ = \phi + 4 \cdot \theta \quad \text{————— ①}$$

スネルの法則から

$$(\sin \theta / 5900) = (\sin \phi / 3230) \quad \text{②}$$

①、②式から

$$(3230 / 5900) \cdot \sin \theta = \cos (4 \cdot \theta) \quad \text{③}$$

倍角の公式を 2 回使い

$$\cos (4 \cdot \theta) = 1 - 2 \sin^2 2\theta = 1 - 2 \cdot (4 \cdot \sin^2 \theta \cos^2 \theta) = 1 - 8 \cdot (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta)$$

$$\therefore (3230 / 5900) \cdot \sin \theta = 1 - 8 \cdot (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta)$$

※ ここまで来ましたが四次方程式が解けなくてギブアップしたので ③ の式でエクセルを使って解きました。 π は 3.14 ではなくエクセルの関数 “pi ()” を使うと精度が向上しました。

$$\text{エクセルの数値計算によって} \quad \theta = 19.826964745^\circ \quad \phi = 10.69214104^\circ$$

縦波で進む経路は三角形 A B T が円の中心を通るため角 B が 90° で、4 回分の経路の合計は

$$4 \cdot D \cdot \cos \theta \quad \text{————— ④}$$

$$\text{横波の経路は縦波の時間換算で} \quad D \cdot (5900 / 3230) \cdot \cos \phi \quad \text{————— ⑤}$$

④+⑤を探傷器の表示である片道距離では

$$(4 \cdot D \cdot \cos \theta + D \cdot (5900 / 3230) \cdot \cos \phi) / 2 = (3.762 + 1.795) \cdot D / 2 \quad \div \quad \boxed{2.78D}$$

5. あとがき

今から30年ほど前に当時のNDI資格「UT2級」を受けたとき覚えた数値ですが、2007年のある夏の日曜日、どうやって導かれた数値か、気になって計算してみました。

鉄骨の検査では100%関係ない部分であり、しかも仮に丸棒の垂直探傷をおこなっても底面エコーの後方に出現するので、実際の探傷には関係ないので、これは単なる知識でしかありませんが、普段使っていない部分の脳みそを使い、頭の活性化（老化防止？）になりました。

ここで使用した三角関数の公式は

(1) 加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

(2) 加法定理で $\beta = \alpha$ として導ける2倍角の公式

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$$

(3) 正弦定理

直角三角形の角度のSinと対辺の比が、三辺で同じという式です。

これはパイプの長手継手の探傷では良く使います。静岡の小笠山サッカー場（エコパ）の隣の室内競技場新築工事のとき、長手継手の検査があり、60°の探触子を使えば初層ルート部に垂直に超音波が入射するのを計算し、要領書を書いた記憶があります。

その他の公式

(4) 二次方程式の解

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a \quad \text{懐かしいです}$$

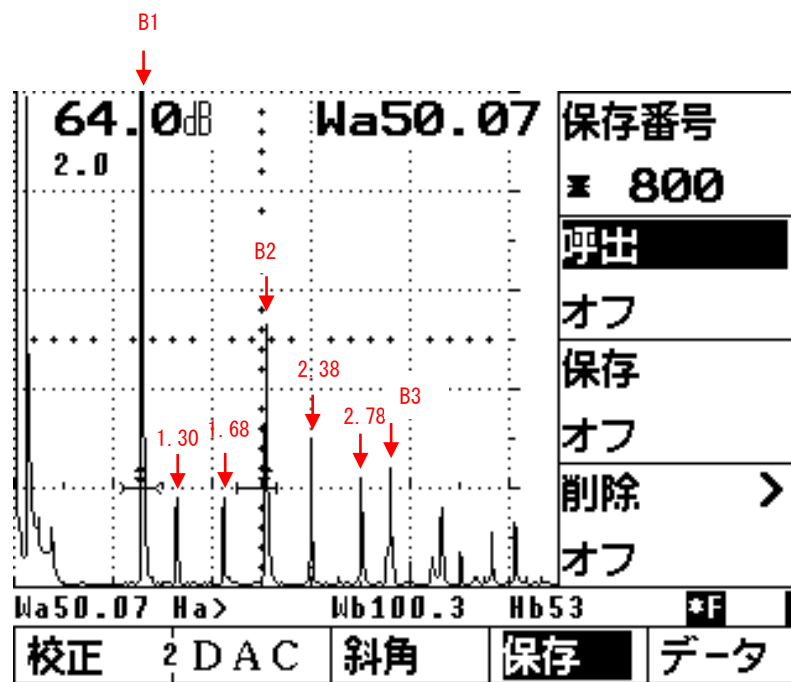
(5) エクセルの事

2.78Dでは四次方程式が解けなく、エクセルで直接数値計算して求めました。このとき π は3.14ではなくエクセルの関数“pi()”を使うと精度が向上しました。また、エクセルの有効桁数も加減乗除では15桁表示しても、三角関数を使ったときは8桁が有効数字のようでした。

スマートに解けたものは1.30Dと2.38Dでした。ほかは何か力づくで答えを出したような感じで、特に2.78Dはエクセルを使ったことで後味が良くありません。インターネットには四次方程式の解き方が書いてありますが、どなたかスマートに解いたら教えてください、よろしくお願いします。

最後にこのJUST技報に掲載する前に、チェックと検算は大橋範之君にお願いし、「2.78D」では、計算結果をもとにCAD上で精密に「☆」を描いた確認作業には、名古屋営業所UTグループの石原祥子さん、現地調査グループの“AUTO-CAD 王”永村君に協力してもらいました。感謝します。

最後に次ページに探傷図形を添付しました。



直径 5 0 mm の丸棒の側面の探傷図形